

ΤΑΞΗ: Γ' ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΣ: ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ / ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Τετάρτη 27 Απριλίου 2022
Διάρκεια εξέτασης: 3 ώρες

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

Θέμα Α

A1. Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α, β) , με εξαίρεση ίσως ένα σημείο x_0 , στο οποίο όμως η f είναι συνεχής. Αν η $f'(x)$ διατηρεί πρόσημο στο $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$, τότε το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο και η f είναι γνησίως μονότονη στο (α, β) .

Μονάδες 7

A2. Να διατυπώσετε το θεμελιώδες θεώρημα του ολοκληρωτικού λογισμού.

Μονάδες 4

A2. Πότε η ευθεία $y = \lambda x + \beta$ λέγεται ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f , όταν $x \rightarrow +\infty$.

Μονάδες 4

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Αν f, g, h είναι τρεις συναρτήσεις και ορίζεται η $ho(g \circ f)$, τότε ορίζεται και η $(hog) \circ f$ και ισχύει $ho(g \circ f) = (hog) \circ f$

β) Αν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x))$ τότε κατ' ανάγκη υπάρχουν τα όρια των συναρτήσεων f και g στο x_0 .

γ) Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$, τότε ισχύει πάντα $f(\alpha) \cdot f(\beta) < 0$.

δ) Αν μια συνάρτηση f παρουσιάζει ολικό μέγιστο, τότε αυτό θα είναι το μεγαλύτερο από τα τοπικά μέγιστα.

ε) Αν οι συναρτήσεις f, g είναι συνεχείς στο $[\alpha, \beta]$ και ισχύει $f(x) \leq g(x)$ για κάθε

$$x \in [\alpha, \beta] \text{ τότε } \int_{\beta}^{\alpha} f(x) dx \leq \int_{\beta}^{\alpha} g(x) dx.$$

Μονάδες 10

Θέμα Β

Δίνονται οι συναρτήσεις $\varphi(x) = \frac{e^x}{x}, x \neq 0$ και $g(x) = \ln x, x > 0$

B1. Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση $f = \varphi \circ g$.

Μονάδες 4

➤ Αν $f(x) = \frac{x}{\ln x}, 0 < x \neq 1$, τότε

B2. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία την f και να βρείτε τα ακρότατα.

Μονάδες 5

B3. Να μελετήσετε την κυρτότητα της f και να βρείτε τα σημεία καμπής της γραφικής της παράστασης.

Μονάδες 8

B4. Να βρείτε τις κατακόρυφες ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f και να τη σχεδιάσετε.

Μονάδες 8

Θέμα Γ

Έστω η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \varepsilon\phi x + \alpha, & -\frac{\pi}{2} < x < 0 \\ \ln(x+1) + 1 + \beta, & x \geq 0 \end{cases}$

όπου α, β ακέραιοι για την οποία ισχύει το θεώρημα του Bolzano στο $\left[-\frac{\pi}{4}, e-1\right]$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι $\alpha = 0$ και $\beta = -1$.

Μονάδες 6

Γ2. Να βρείτε τη μικρότερη τιμή του $\lambda > 0$ ώστε να ισχύει

$$f(x) \leq \frac{x^2 - x}{2} + \ln \lambda, \text{ για κάθε } x > 0.$$

Μονάδες 6

Γ3. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{e-1} f(x) dx$.

Μονάδες 8

Γ4. Ένα κινητό $M(\alpha, f(\alpha))$ με $\alpha > 0$ κινείται στη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \ln(x+1)$, $x > 0$ έτσι ώστε η τετμημένη του να μεταβάλλεται με ρυθμό 1 cm/sec . Αν (ε) είναι η εφαπτομένη της C_f στο M και θ η γωνία που σχηματίζει με τον άξονα $x'x$, να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της γωνίας θ , τη χρονική στιγμή t_0 που η τετμημένη του M είναι ίση με $\sqrt{3} - 1 \text{ cm}$.

Μονάδες 5

Θέμα Δ

Έστω η συνάρτηση $f(x) = e^x - \alpha x$, όπου $\alpha, x \in \mathbb{R}$.

Δ1. Αν $f(x) \geq 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να βρείτε την τιμή του α .

Μονάδες 5

➤ Για την τιμή $\alpha = 1$

Δ2. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , την εφαπτομένη της στο σημείο $M(1, e-1)$ και τον άξονα $y'y$.

Μονάδες 6

Δ3. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = \ln \frac{e^x}{e^x - x}$, $x \in \mathbb{R}$.

Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της g έχει δύο σημεία καμπής, έστω $A(x_1, g(x_1))$ και $B(x_2, g(x_2))$ με $x_1 < x_2$.

Μονάδες 8

Δ4. Για τη συνάρτηση g του ερωτήματος Δ3, να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}$ με $\xi_1 < \xi_2$ τέτοιοι ώστε να ισχύει: $(1 - x_1) \cdot g'(\xi_1) > (x_2 - 1) \cdot g'(\xi_2)$.

Μονάδες 6

Καλή επιτυχία